

# 可換代数の形式化

可換代数の形式化動向

Mizar による定理形式化

Mizarライブラリの既存アークル

展望：Mizarライブラリとは何であるか？

TTP@山口大 2020 .11.16

渡瀬泰成

# 可換代数の形式化動向

## ▶ 体論の諸定理の形式化 (Mizar)

- ▶ Christoph Schwarzweller. [Field Extensions and Kronecker's Construction](#), Formalized Mathematics 27(3), pages 229-235, 2019.
- ▶ Christoph Schwarzweller, Representation Matters: An Unexpected Property of Polynomial Rings and its Consequences for Formalizing Abstract Field Theory (Proceedings of the Federated Conference on Computer Science and Information Systems pp. 67–72, 2018)

上記二番目のアーティクルに代数系のMizarの形式化の簡潔な解説あり。

## ▶ Witt ベクトルの形式化 (LEAN Theorem Prover)

- ▶ Johan Commelin Robert Y. Lewis Formalizing the Ring of Witt Vectors (PrePrint arXiv:2010.02595 2020-10-6.)

## ▶ ヒルベルト零点定理(ISABEL)

- ▶ Alexander Maletzky Hilbert's Nullstellensatz 2019-06-16

## ▶ The Matiyasevich/MRDP Theoremの形式化 (ヒルベルト第10問題) Mizar

- ▶ Karol Pąk. Formalization of the MRDP Theorem in the Mizar System, Formalized Mathematics 27(2), pages 209-221, 2019.

## ▶ ディオファントス方程式

# Mizar による定理形式化

## ▶ 目的

- ▶ Mizar Libraryに可換代数の定理の形式証明を蓄積.
  - ▶ 当面は定理の形式化した証明の蓄積、将来の効率的形式化の材料の供出
  - ▶ 形式化の手本としてAtiyah / MacDonaldのテキストを用いる（底本）
- ▶ Mizarでどこまで形式化できるかチャレンジ
  - ▶ 環論からの定理を証明 零点定理 準素イデアル分解...etc
  - ▶ 整数論からの定理の形式化
  - ▶ 形式化される定理の表現をなるべく見やすくする

```
theorem :: RINGFRAC:29  
S~R is Ring;
```

```
::::: [AM] Prop 1.8  
theorem :: TOPZARI1:19  
nilrad A = meet Spectrum A;
```

# Mizarライブラリの既存アーティクル

- ▶ 環上の両側加群
- ▶ 可換・整域の定義と性質
- ▶ 整数環の商体
- ▶ 付値環
- ▶ 多項式環（一変数、多変数）
  - ▶ Little Bezou(因数定理)
  - ▶ 代数学の基本定理
  - ▶ ヒルベルトの基底定理
  - ▶ 形式的微分
- ▶ Buchbergerアルゴリズムの形式化

## 筆者形式化分

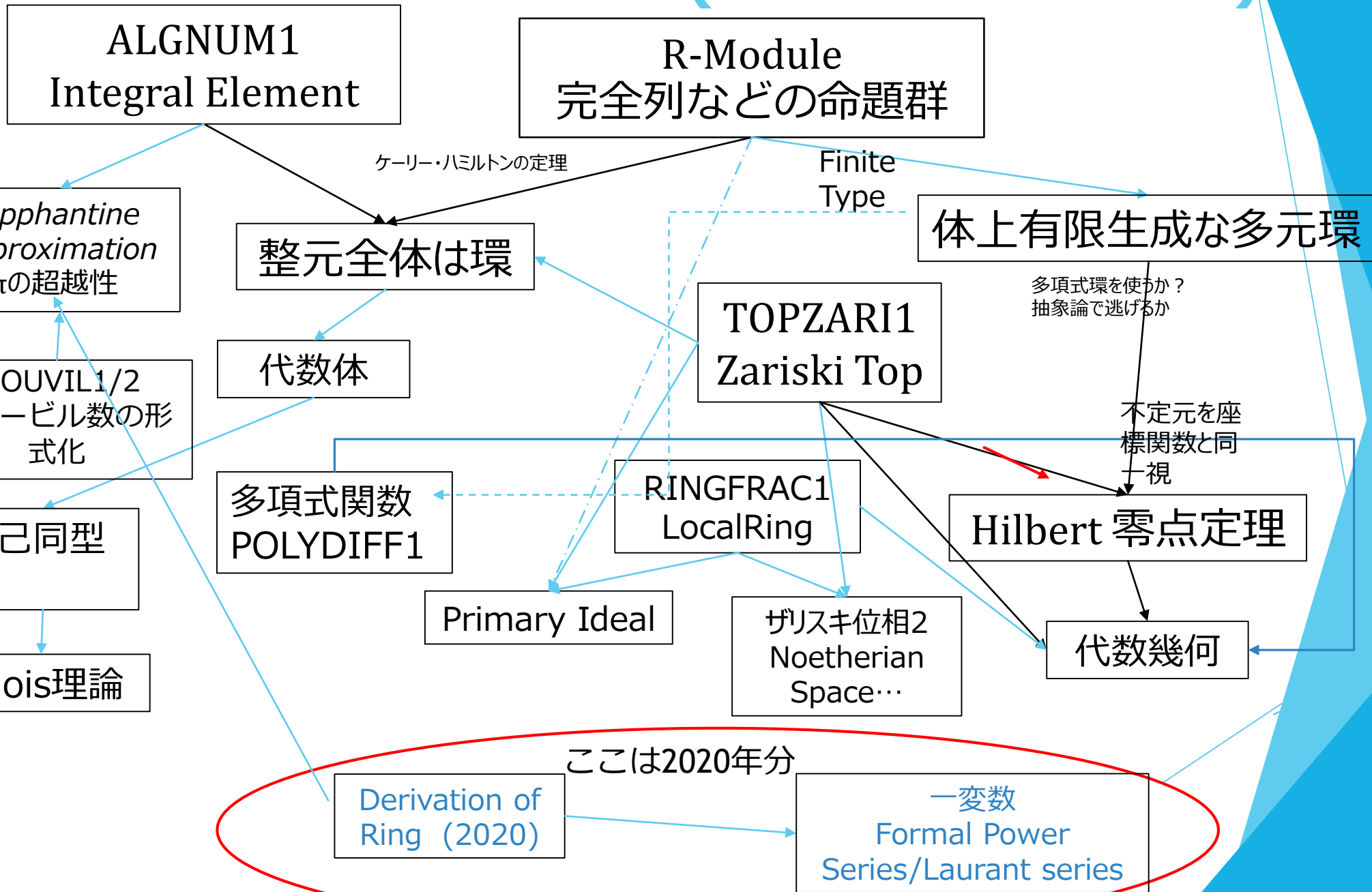
- ▶ 代数的数
- ▶ Zariski位相
- ▶ 局所環
- ▶ 環の微分（Fm誌投稿/review中）

将来的には、

以下の定義諸定理の形式化

- ▶ 準素イデアル分解
- ▶ DVR/Dedekind Domain等
- ▶ べき級数環/体の微分

# 今後の展望 (as of 2018 Dec)



# 展望：Mizarライブラリとは何であるか？

蓄積された形式化された定理の証明どう活用され、応用されるのか？

1. 形式化証明の蓄積の為の形式化作業
2. 数学論文の機械的検証
3. ソフトウェアの形式検証
4. ライブラリの証明を解析して形式化の自動化の試み（中正先生グループ）
5. 計算代数の形式化証明への応用
6. 形式化された定理を組み合わせて定理を生成する

等を意識しているが、、、これはと思うアイデアには逢着していない。