Coq によるマッチング理論の形式化

辻 陽介

北見工業大学

2023 年 10 月 30 日

今回話す内容

この発表の話題は以下の通り：

- マッチングの説明
- 形式化の具体例
- まとめ

目標とする定理

次のような事実が知られている。

Theorem ([Hibi-Higashitani-Kimura-Tsuchiya, JAC (2016), Proposition 2.1])

任意の G に対し

$$1 \leq \text{ind-match}(G) \leq \text{min-match}(G) \leq \text{match}(G) \leq 2\,\text{min-match}(G)$$

が成り立つ。

この定理の ind-match(G) $\leq$ min-match(G) の証明について発表する。

マッチング

G を有限単純グラフ、 $V(G)$ を G の頂点集合、$E(G)$ を G の辺集合とする。

Definition (マッチング)

部分集合 $S \subset E(G)$ において、任意の $e, f \in S$ に対して e と f が異なるならば e と f が頂点を共有しないとき S は **マッチング**であるという。

```
Definition is_matching :=
  [ ∀ e in S, [ ∀ f in S, (e != f) ⟹ [disjoint `d(e) & `d(f)]%fset]].

Definition matching : {fset {fset `E(G)}} :=
  [fset S : {fset `E(G)} | is_matching S].
```

極大マッチング、誘導マッチング

Definition (極大マッチング)

マッチング S に対して、任意の 真に S を含む $T \subset E(G)$ がマッチングにならないとき S は**極大マッチング**という。

Definition (誘導マッチング)

任意の相異なる $e, f \in S$ に対し、任意の $g \in E(G)$ が $e \cap g = \emptyset$ または $f \cap g = \emptyset$ を満たすとき S を**誘導マッチング**という。

極大マッチングは、新たに辺を付け足せないマッチング。
誘導マッチングは、辺どうしをつなぐ辺が存在しないマッチング。

```
Definition is_maximal_matching :=
  (S \in matching G) &&
  [ ∀ T : {fset 'E(G)},
    (S '<' T) ⟹ (T \notin matching G)].

Definition is_induced_matching :=
  [ ∀ e in S, [ ∀ f in S, (e != f)
  ⟹ [ ∀g, [disjoint 'd(e) & 'd(g)] || [disjoint 'd(f) & 'd(g)]]]].
```

マッチングに関する不変量

G のマッチング数 match(G)、 最小マッチング数 min-match(G)、誘導マッチング数 ind-match(G) を以下のように定める：

$$\mathrm{match}(G) = \max\{|M| : M \text{ は } G \text{ のマッチング}\}$$
$$\mathrm{min\text{-}match}(G) = \min\{|M| : M \text{ は } G \text{ の極大マッチング}\}$$
$$\mathrm{ind\text{-}match}(G) = \max\{|M| : M \text{ は } G \text{ の誘導マッチング}\}$$

```
Definition nmatch := \max_(S in matching) #|` S |.
Definition nminmatch :=
  \big[Order.min/nmaxmatch]_(S in maximal_matching) #|` S |.
Definition nindmatch := \max_(S in induced_matching) #|` S |.
```

$$\mathrm{match}(G) = \max\{|M| : M \text{ は } G \text{ のマッチング}\}$$
$$\text{min-match}(G) = \min\{|M| : M \text{ は } G \text{ の極大マッチング}\}$$
$$\text{ind-match}(G) = \max\{|M| : M \text{ は } G \text{ の誘導マッチング}\}$$

これら 3 種のグラフ理論的不変量に関して、以下の事実が知られている。

Theorem ([Hibi-Higashitani-Kimura-Tsuchiya, JAC (2016), Proposition 2.1] (再掲))

任意の G に対し

$$1 \leq \text{ind-match}(G) \leq \text{min-match}(G) \leq \mathrm{match}(G) \leq 2\,\text{min-match}(G)$$

が成り立つ。

ind-match$(G) \leq$ min-match(G) の証明

N を $|N| = \text{ind-match}(G)$ となる誘導マッチング、M を $|M| = \text{min-match}(G)$ となる極大マッチングとする。

ind-match$(G) \leq$ min-match(G) の証明

N を $|N| =$ ind-match(G) となる誘導マッチング、M を $|M| =$ min-match(G) となる極大マッチングとする。

任意の $e \in N$ に対してある $h \in M$ が存在して $e \cap h \neq \emptyset$ となる。

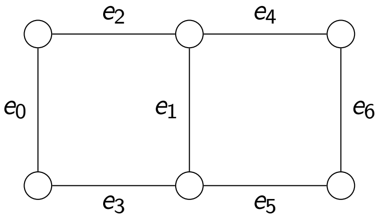
ind-match$(G) \leq$ min-match(G) の証明

N を $|N| =$ ind-match(G) となる誘導マッチング、M を $|M| =$ min-match(G) となる極大マッチングとする。

任意の $e \in N$ に対してある $h \in M$ が存在して $e \cap h \neq \emptyset$ となる。もし、任意の $h \in M$ で $e \cap h = \emptyset$ ならば $M \cup \{e\}$ はマッチングとなる。これは M が極大であることに矛盾する。

ここで誘導マッチング数を与えるマッチング N、最小マッチング数を与えるマッチング M に対して $f : N \to M$ を $e \in N$ を受け取って頂点を共有する辺 $f(e) \in M$ を 1 つ返す関数とする。

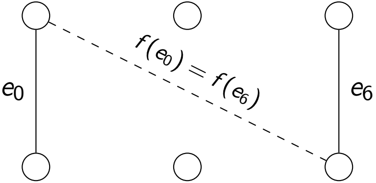
例として次のグラフを考える。



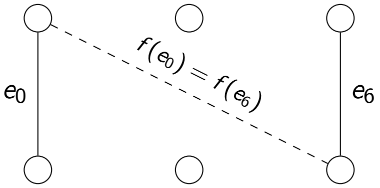
このグラフについての N, M をひとつ選ぶとすると、
$N = \{e_0, e_6\},\ M = \{e_2, e_5\}$ のようにとれる。
このとき N の要素に対して M の要素は f を使って
$f(e_0) = e_2, f(e_6) = e_5$ と表せる。

ここで誘導マッチング数を与えるマッチング N、最小マッチング数を与えるマッチング M に対して $f : N \to M$ を $e \in N$ を受け取って頂点を共有する辺 $f(e) \in M$ を 1 つ返す関数とする。
任意の N の辺 e_0, e_1 において $e_0 \neq e_1$ ならば $f(e_0) \neq f(e_1)$ である。

ここで誘導マッチング数を与えるマッチング N、最小マッチング数を与えるマッチング M に対して $f : N \to M$ を $e \in N$ を受け取って頂点を共有する辺 $f(e) \in M$ を 1 つ返す関数とする。
任意の N の辺 e_0, e_1 において $e_0 \neq e_1$ ならば $f(e_0) \neq f(e_1)$ である。
このことを背理法で示す。もし $f(e_0) = f(e_1)$ ならば e_0 と e_1 をつなぐ辺が存在する。しかしこれは N が誘導マッチングであることに反する。



ここで誘導マッチング数を与えるマッチング N、最小マッチング数を与えるマッチング M に対して $f : N \to M$ を $e \in N$ を受け取って頂点を共有する辺 $f(e) \in M$ を 1 つ返す関数とする。
任意の N の辺 e_0, e_1 において $e_0 \neq e_1$ ならば $f(e_0) \neq f(e_1)$ である。
このことを背理法で示す。もし $f(e_0) = f(e_1)$ ならば e_0 と e_1 をつなぐ辺が存在する。しかしこれは N が誘導マッチングであることに反する。



よって $f : N \to M$ は単射であるから $|N| \leq |M|$ □

- N を $|N| = \text{ind-match}(G)$ となる誘導マッチング、M を $|M| = \text{min-match}(G)$ となる極大マッチングとする。
- 任意の $e \in N$ に対してある $h \in M$ が存在して $e \cap h \neq \emptyset$ となる。
  - もし、任意の $h \in M$ で $e \cap h = \emptyset$ ならば $M \cup \{e\}$ はマッチングとなる。これは M が極大であることに矛盾する。
- ここで $f : N \to M$ を $e \in N$ を受け取って頂点を共有する辺 $f(e) \in M$ を 1 つ返す関数とする。
- $f : N \to M$ は単射である。
  - 任意の N の辺 e_0, e_1 において $e_0 \neq e_1$ ならば $f(e_0) \neq f(e_1)$ である。
    - 背理法で示す。$f(e_0) = f(e_1)$ ならば e_0 と e_1 をつなぐ辺が存在する。しかしこれは N が誘導マッチングであることに反する。
- よって $|N| \leq |M|$

Coq で行った証明の手順

以下の型を持つ関数を ind-match(G) $\leq$ min-match(G) の証明の前に定めた：

- グラフ G において、ϕ は辺を受け取って辺とその頂点のペアを返す関数。
- ψ は辺 e を受け取って ϕ e のはじめの要素 (辺) を返す関数。

ϕ の定義

補題

M がグラフ G の極大マッチングならば、任意の G の辺 e に対して M の辺 f が存在して e と f に共通の頂点 v が存在する。

```
Lemma maxmatch_edgeI' (M : {fset `E(G)}) (e : `E(G)):
  M \in maximal_matching G →
  ∃ f : `E(G), f \in M ∧ ∃ v : `V(G), v \in `d(e) ∧ v\in `d(f).
```

この補題に選択公理を 2 回適用して辺 f と頂点 v を取り出す関数が ϕ である。

```
Let phi_ (M : {fset `E(G)}) (Mmax : M \in maximal_matching G) :
  `E(G) → `E(G) * `V(G).
move⇒ e; move: (maxmatch_edgeI' e Mmax).
case/boolp.cid ⇒ f [] _; case/boolp.cid ⇒ v _.
exact: (f, v).
Defined.
```

ψ の定義

ψ は ϕ の出力の片方 (辺) を出力する関数

```
Let psi (M : {fset 'E(G)}) (Mmax : M \in maximal_matching G) e :=
  (phi Mmax e).1.
```

ψ の行先は極大マッチング M の要素である

```
Let psi_M (M : {fset 'E(G)}) (Mmax : M \in maximal_matching G) e :
  psi Mmax e \in M.
```

ψ と極大マッチング M に対して、誘導マッチング N の要素が入力であるとき、入力が異なるならば出力は異なる

```
Lemma psi_inj (M : {fset 'E(G)}) (Mmax : M \in maximal_matching G)
  (N : {fset 'E(G)}) e0 e1 :
    N \in induced_matching G → e0 \in N → e1 \in N →
    e0 != e1 → psi Mmax e0 != psi Mmax e1.
```

- ind-match(G) を与える誘導マッチング N が存在する。
- min-match(G) を与えるマッチング M が存在する。
- N から M への関数 f をあらかじめ定義していた汎関数 ψ から定める。
- f が単射ならば、M の濃度が N の濃度以上であるという補題を適用する。
- f が単射であることを証明する。
  - ($\forall x_1, x_2 \in N, f(x_1) = f(x_2) \to x_1 = x_2$ を示す。)
  - 全称量化子の二つの変数をそれぞれ e_0, e_1 として固定して考える（仮定に加える）。
  - Goal を対偶に変える ($e_1 \neq e_2 \to f(e_1) \neq f(e_2)$ を示す)。
  - f の入力となる誘導マッチング N の辺が異なるならば、出力の極大マッチング M の辺が異なることを示す。
    - あらかじめ定めていた ψ の単射性を Goal に移動する。
    - f の定義を書き下す (よって f は単射である)。
- 証明終了

```
Lemma nindmatch_leq_nminmatch : nindmatch G <= nminmatch G.
Proof.
case: (exists_nindmatch G) => N Nind -> .
case: (exists_nminmatch G) => M Mmax -> .
rewrite 2!cardfE.
set f : N -> M := fun n => [` (psi_M Mmax (val n)) ].
apply: (leq_card f).
move=>  e0 e1.
move/eqP => fe01.
apply/eqP.
move: fe01.
apply: contraLR.
move/(psi_inj Mmax Nind).
rewrite /f.
by rewrite 2!fsvalP => /(_ erefl erefl).
Qed.
```

初めに参考にした ind-match(G) $\leq$ min-match(G) の証明

ind-match(G) $= p$, min-match(G) $= q$ とし、 $N = \{e_1, \ldots, e_p\}$ を誘導マッチング、 $M = \{e'_1, ..., e'_q\}$ を極大マッチングとする。任意の $1 \leq k \leq p$ に対し、ある $1 \leq i_k \leq q$ が存在して $e_k \cap e_{i_k} \neq \emptyset$ が成り立つ。背理法で示す。ある $1 \leq j \leq p$ が存在して、任意の $1 \leq k \leq q$ に対して $e_j \cap e_k \neq \emptyset$ が成り立つとすると、$M \cup \{e_j\}$ はマッチングとなるが、これは M の極大性に反する。ここで、任意の $1 \leq k \neq k' \leq p$ に対し $i_k \neq i_{k'}$ が成り立つ。背理法で示す。ある $1 \leq k \neq k' \leq p$ が存在して $i_k = i_{k'}$ が成り立つと仮定すると、$e_k \cap e_{i_k} \neq \emptyset$ かつ $e_{k'} \cap e_{i_k} \neq \emptyset$ となる。これは 2 辺 $e_k, e_{k'}$ をつなぐ辺 e_{i_k} が存在することを意味しているが、 N が誘導マッチングであることに反する。よって、 $1 \leq i_1, i_2, \ldots, i_p \leq q$ は全て異なる。

- ind-match$(G) = p$, min-match$(G) = q$ とし、$N = \{e_1, \ldots, e_p\}$ を誘導マッチング、$M = \{e'_1, ..., e'_q\}$ を極大マッチングとする。
- 任意の $1 \leq k \leq p$ に対し、ある $1 \leq i_k \leq q$ が存在して $e_k \cap e_{i_k} \neq \emptyset$ が成り立つ。
  - 背理法で示す。ある $1 \leq j \leq p$ が存在して、任意の $1 \leq k \leq q$ に対して $e_j \cap e_k \neq \emptyset$ が成り立つとする。
  - $M \cup \{e_j\}$ はマッチングとなるが、これは M の極大性に反する。
- 任意の $1 \leq k \neq k' \leq p$ に対し $i_k \neq i_{k'}$ が成り立つ。
  - 背理法で示す。ある $1 \leq k \neq k' \leq p$ が存在して $i_k = i_{k'}$ が成り立つと仮定する。
  - $e_k \cap e_{i_k} \neq \emptyset$ かつ $e_{k'} \cap e_{i_k} \neq \emptyset$ となる。
  - これは 2 辺 $e_k, e_{k'}$ をつなぐ辺 e_{i_k} が存在することを意味しているが、N が誘導マッチングであることに反する。
- よって、$1 \leq i_1, i_2, \ldots, i_p \leq q$ は全て異なる。

形式化した証明との違い

- 初めに参考にした証明では、マッチングの要素に添え字をつけて、添え字同士の対応を考えている。
- 単射という言葉は使わず、
  $\text{ind-match}(G) = p, \ \text{min-match}(G) = q$ として、
  N の辺の添え字 $1, \ldots, k, \ldots, p$ に対応する M の辺の添え字を $1, \ldots, i_k, \ldots, q$ としている。
- 最終的に $i_1, \ldots, i_p$ はすべて異なり、$1 \leq i_1, \ldots, i_p \leq q$ となることを示している。

(形式化した証明では、M と N の単射を考えていた。)

match$(G) \leq 2$ min-match(G) の証明

$q =$ min-match(G) とし、M を $|M| =$ min-match(G) となる極大マッチングとする。
もし、ある辺 $e \in E(G)$ が存在して $e \cap V(M) = \emptyset$ となると仮定すると、$M \cup \{e\}$ がマッチングとなるが、これは M の極大性に反する。従って、任意の $e \in E(G)$ に対し、$e \cap V(M) \neq \emptyset$ となる。$|V(M)| = 2q$ であるから、$(2q+1)$ 本以上の辺からなるマッチングは存在しないことがわかる。従って match$(G) \leq 2q$ が成り立つ。

より丁寧な証明

M, S をそれぞれ $|M| = \text{match}(G),\ |S| = \text{min-match}(G)$ となるマッチングとする。S が極大であることから、任意の G の辺 $e \in E(G)$ で、e と頂点の集合 $V(S)$ は共通部分が空でない。よって、どの M の辺 $f_i = \{v_i, w_i\}$ に対しても $v_i \in V(S)$ または $w_i \in V(S)$ である。
ここで任意の $1 \leq i \leq |M|$ について、$v_i \in V(S)$ とする。
M がマッチングであるから、$1 \leq i \neq j \leq |M|$ となる任意の i, j において、$v_i \neq v_j$ である。したがって $|V(S)| \geq |M| = \text{match}(G)$。
$|V(S)| = 2|S| = 2\,\text{min-match}(G)$ であったから、
$\text{match}(G) \leq 2\,\text{min-match}(G)$ を得る。

Coq での証明

- min-match(G) を与えるマッチング M が存在する。
- マッチング M の濃度の 2 倍は M の頂点の集合の濃度。
- match(G) を与えるマッチング N が存在する。
- 列の長さ (size) の比較を要素の濃度の比較に変換する。
- N から M の頂点への関数 f を仮定に加える。
- f が単射ならば、M の濃度が N の濃度以上であるという補題を適用する。
- f が単射であることを示す ($\forall x_1, x_2 \in N, f(x_1) = f(x_2) \to x_1 = x_2$ を示す)。
    - 全称量化子の二つの変数をそれぞれ $e0, e1$ として固定して考える (仮定に加える)
    - ゴールを対偶に変える ($e_1 \neq e_2 \to f(e_1) \neq f(e_2)$ を示す)。
    - N から M への単射が存在し、頂点が異なるならば、辺が異なることを示す。
        - ϕ の単射性をゴールに移動する。
- 証明終了

```
Proof.
case: (exists_nminmatch G) => M Mmax -> .
rewrite -matching_double_card;
  last by case/maximal_matchingP: Mmax.
case: (exists_nmatch G) => N Nm -> .
rewrite 2!cardfE.
set f : N -> VofESet M := fun n => [` (phi_VofESet Mmax (val n)) ].
apply: (leq_card f).
move => e0 e1.
move/eqP => H; apply/eqP; move: H.
apply: contraLR.
move/(phi_inj Mmax Nm).
by rewrite 2!fsvalP => /(_ erefl erefl).
Qed.
```

まとめ

グラフのマッチングに関する理論を Coq で形式化した。

Theorem ([Hibi-Higashitani-Kimura-Tsuchiya, JAC (2016), Proposition 2.1] (再掲))

任意の G に対し

$$1 \leq \text{ind-match}(G) \leq \text{min-match}(G) \leq \text{match}(G) \leq 2\,\text{min-match}(G)$$

が成り立つ。

この定理の $\text{ind-match}(G) \leq \text{min-match}(G)$ の証明について発表した。

T. Hibi, A. Higashitani, K. Kimura and A. Tsuchiya, Dominating induced matching of finite graphs and regularity of edge ideals, J. Algebraic Combin. 43 (2016), 173 – 198.